ПРОЕКТИВНЫЕ МОРФОЛОГИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Ю.В. Визильтер, С.Ю. Желтов

ФГУП Государственный научно-исследовательский институт авиационных систем
125319, Москва, ул. Викторенко, 7; e-mail: viz@gosniias.ru

В качестве единого математического формализма для описания широкого класса процедур низко- и среднеуровневого структурного анализа изображений предложен формализм т.н. «проективной морфологии изображений». Проективные морфологии изображений могут быть, в частности, построены на базе таких методов анализа изображений как математическая морфология Серра, морфологический анализ Ю.П. Пытьева, частотные и пространственно-частотные методы фильтрации.

Введение

Задачей данной работы является построение единого математического формализма для описания широкого класса процедур низко- и среднеуровневого структурного анализа изображений. *Структурной моделью изображения* (объекта) будем называть описание изображения, представляющее его в виде *комбинации* нескольких *яркостно-геометрических элементов* (изображений), связанных между собой определенными *яркостно-геометрическими отношениями*. *Классом структур* будем называть любое множество структурных моделей, замкнутое относительно некоторого *отношения эквивалентности структур*. Как известно, такое отношение эквивалентности может порождаться некоторой группой преобразований, заданных на множестве структурных моделей и имеющих смысл соответственно яркостно-геометрических и/или структурных преобразований. *Структурным фильтром* будем называть процедуру преобразования некоторого произвольного исходного изображения к виду, соответствующему некоторому заданному классу структур. Если для любого произвольного изображения его *фильтрованный образ* в данном классе структур (а) существует и (б) определяется однозначно, то такой структурный фильтр может быть рассмотрен как *оператор структурной проекции* изображения на заданный класс моделей. При этом возникает взаимно однозначное *двойственное отношение* между классом структурных моделей и соответствующим классом структурных фильтров.

Яркостно-геометрические модели проекторов

Рассмотрим представление изображения f и его проекций в точке (x,y), используемые в ряде известных методов анализа изображений (см. например [1]).

Цифровое изображение:

$$\mathrm{Im}(f,x,y)= \Sigma_{ij}(a_{ij}\bullet\varphi(i,j,x,y)) = $$
$$= \mathrm{MAX}_{xy}\,(a_{ij}\bullet\varphi(i,j,x,y)),$$

где $\varphi(i,j,x,y)$ – индикаторная функция отдельного пикселя вида

$$\varphi(i,j,x,y)= \{1: x=i,y=j;\ 0: x\neq i,y\neq j\};$$

(x,y) – положение пикселя; a_{ij} – значение цифрового изображения в точке (i,j).

Дискретное двумерное преобразование Фурье:

$$\mathrm{FOUR}(f,x,y))=\Sigma_{kj}(a_{kj}\bullet\varphi(\omega_k,\omega_j,x,y)),$$

где ω_k,ω_j.- пространственные частоты,
$\varphi(\omega_k,\omega_j,x,y)=\exp(-i\bullet[x\bullet\omega_k+y\bullet\omega_j])$;
a_{kj} – коэффициент разложения Фурье;
i – мнимая единица.

Кратномасштабное вейвлет-преобразование:

$$W(f,x,y))=\Sigma_{ij}(a_{ijRn}\bullet\varphi(i,j,R,n,x,y)),$$

где $\varphi(0,0,1,n)$ – эталонный вейвлет n-го типа, (i,j) – положение вейвлета, R – коэффициент масштаба; a_{ijRn} – коэффициент вейвлет-преобразования.

Морфологическое открытие Серра [2]:

$$O(f,x,y))=MAX_{ij}(a_{ij}\bullet\varphi(i,j,x,y)),$$

где $\varphi(0,0)=\{0,1\}$ – эталонный *бинарный* структурирующий элемент, (i,j) – положение структурирующего элемента; $\{a_{ij}\}$– результат *эрозии* изображения $f(x,y)$.

Морфологическое сравнение изображений Ю.П.Пытьева [3]:

$$Pr_{\mathbf{F}}(f,x,y)=\Sigma_n(a_n\bullet\varphi(n,x,y))=$$
$$=MAX_n(a_n\bullet\varphi(n,x,y)),$$

где $\varphi(n,x,y)$ – индикаторная функция n-й области разбиения кадра $F_n\subseteq\mathbf{F}=\{F_i\}$ на участки однородной яркости вида:

$$\varphi(n,x,y)= \{1: (x,y)\in F_n;\ 0: (x,y)\notin F_n\},$$

a_n – средняя яркость изображения $f(x,y)$по области F_n.

Таким образом, во всех случаях просматривается следующая единая схема *структурного представления проекции изображения*:

$$A(\mathbf{p})=\vee_{q\in Q}(A(\mathbf{q})\bullet\varphi(\mathbf{p},\mathbf{q})), \qquad (1)$$

где $\mathbf{p}=(x,y)$ – вектор пиксельных координат в исходном пространстве изображения; $A(\mathbf{p})=Im(x,y)$ – анализируемое изображение, заданное как двумерная скалярная функция интенсивности сигнала (яркости); $\varphi(\mathbf{p},\mathbf{q})=\varphi(x,y,\mathbf{q})$ – набор образующих (примитивов) данного структурного разложения, также заданных как параметризованные двумерные функции яркости; $\mathbf{q}$ – вектор параметров элемента разложения; $A(\mathbf{q})$ – образ изображения в пространстве параметров (*массив-аккумулятор*);

'$\vee$'$\in${'Σ','MAX','Π','MIN'} – коммутативная и ассоциативная операция *попиксельного* (поэлементного) объединения элементов изображения, которая может иметь смысл либо сложения/умножения элементов, либо взятия максимального/минимального значения.

Модели типа (1) можно назвать *моделями с однородными связями* или просто *однородными моделями* так как все образующие элементы входят в состав модели одним и тем же способом, объединяются при помощи некоторой кумулятивной (коммутативной и ассоциативной) операции, а модель описывает лишь структурный состав образа, но не отношения между его элементами. Рассмотрим такие модели и операции над ними в наиболее общем виде.

Проективное пространство образов

Пусть имеется два сорта элементов: *скаляры* и *образы*. На множестве скаляров Ψ определены две операции – *умножение* ($\bullet$) и *объединение* ($\vee$). Умножение определяет на множестве Ψ группу с 1, объединение – полугруппу с 0. Образы принимают значения на множестве Ω, на котором также определена операция *объединения* ($\vee$), задающая на Ω полугруппу с «нулевым образом» $\varnothing$. Кроме этого, на множестве скаляров Ψ определена операция взятия абсолютного значения (модуля), а на множестве образов Ω определена *норма* $\mu=\|A\|$: $\Omega\to R$. Пусть также определена операция *умножения образа на скаляр* ($\bullet$). Введем операцию *проекции образа на образ*, обладающую следующими свойствами:

$$\begin{gathered} Pr(A,B)\in\Omega;\ Pr(A,B)=Pr(Pr(A,B),B);\\ Pr(A,A)=A;\ Pr(\varnothing,A)=\varnothing;\\ Pr(A,\varnothing)=\varnothing;\ Pr(a\bullet A,B)=a\bullet Pr(A,B);\\ \forall a\neq 0:\ Pr(A,a\bullet B)=Pr(A,B), \end{gathered} \qquad (2)$$

где $a\in\Psi$; $A,B,\varnothing\in\Omega$.

Назовем *линейным проектором* проектор (2) следующего вида:

$$Pr(A,B)=r(A,B)\bullet B \qquad (3)$$

где r(A,B) – коэффициент *линейной корреляции*, удовлетворяющий следующим свойствам:

$$\begin{gathered} r(A,A)=1;\ r(\varnothing,A)=0;\ r(\alpha A,B)=\alpha\bullet r(A,B);\\ \forall\alpha\neq 0:\ r(A,\alpha\bullet B)=r(A,B)/\alpha, \end{gathered} \qquad (4)$$

$A,B\in\Omega$, $r(A,B),\alpha\in\Psi$.

Структурно-корреляционная функция $r(A,B):\{A,B\}\to\Psi$ задает здесь в явном виде систему парных отношений *структурного сходства* образов, отражающую семантические свойства образов предметной области. Это позволяет ввести следующую стандартную меру близости двух образов – *нормированный коэффициент линейной корреляции*:

$$K(A,B) = \|Pr(A,B)\|/\|A\|, \qquad (5)$$

$A,B\in\Omega$; со следующими свойствами:

$$0 \le K(A,B);\ K(A,A)=1;$$
$$K(A,B)=0 \Leftrightarrow Pr(A,B)=\varnothing.$$

Построенное таким образом пространство Ω можно назвать *проективным пространством образов*.

Проективные морфологические разложения

Пусть задано некое произвольное множество образов $\mathbf{B}=\{B_k\}\subseteq\Omega$. Операции объединения и умножения на число образуют над этим множеством $\mathbf{B}$ линейное подпространство $\boldsymbol{B}\subseteq\Omega$, причем $\forall A\in\boldsymbol{B}$:

$$A=\bigvee_{k=1..n}(a_k\bullet B_k), \tag{6}$$

где $\mathbf{a}=\{a_k\}$ – вектор *весов образующих* из $\mathbf{B}$ в данном образе A; n – количество образующих, входящих в данную модель. Если образы из $\mathbf{B}$ являются *линейно независимыми*, то множество $\mathbf{B}$ можно назвать *базисом структурного описания*, его элементы – *структурными примитивами*, а n – соответственно *размерностью базиса*.

Определим *проекцию образа на подпространство*:

$$\Pr(A,\boldsymbol{B})\in\boldsymbol{B};\ \Pr(A,\boldsymbol{B})=\Pr(\Pr(A,\boldsymbol{B}),\boldsymbol{B});\quad \Pr(\varnothing,\boldsymbol{B})=\varnothing;\ \Pr(a\bullet A,\boldsymbol{B})=a\bullet\Pr(A,\boldsymbol{B}), \tag{7}$$

где $a\in\Psi$; $A,\varnothing\in\Omega$; $\boldsymbol{B}\subseteq\Omega$.

Пусть теперь существует такой базис примитивов $\mathbf{E}$ размерности n, что проекция любого образа из Ω на замыкание $\boldsymbol{E}$ удовлетворяет следующему *условию разложимости:*

$$\Pr(A,\boldsymbol{E}) = \bigvee_{k=1..n}(\Pr(A,E_k)) = \bigvee_{k=1..n}(r(A,E_k)\bullet E_k), \tag{8}$$

т.е. *проекция образа на базис есть объединение линейных проекций на его элементы*. Поскольку любому произвольному образу $A\in\Omega$ может быть поставлен в соответствие структурный вектор признаков $\mathbf{a}=\{r(A,E_k)\}$, каждый элемент которого является коэффициентом корреляции данного образа с одним из структурных примитивов, это позволяет определить *операцию морфологического разложения образа по базису* (*decomposition*) как операцию отображения из пространства образов в пространство векторов признаков размерности n:

$$\mathbf{dec_E}(A)=\{r(A,E_1),\ldots,r(A,E_n)\};\quad \mathbf{dec_E}: \Omega\rightarrow\Psi^n. \tag{9}$$

Алгебраическую систему $\{\Psi,\Omega,\bullet,\mathbf{V},\mu,\Pr,\mathbf{E}\}$, для которой справедливо условие (8), будем далее называть *проективной морфологией* на Ω. Базис $\mathbf{E}$ является здесь соответственно *базисом морфологического разложения.* При этом *пространство векторов разложений* $\Theta=\Psi^n\subseteq R^n$ по некоторому базису разложения $\mathbf{E}$ также представляет собой проективное пространство, на котором определены операции *объединения векторов, умножения вектора на скаляр, проекции вектора на вектор* и задана *норма (модуль) вектора.* В пространстве разложений Θ может быть однозначно задана такая операция проекции вектора разложения на вектор разложения

$$\Pr(\mathbf{a},\mathbf{b})=r(\mathbf{a},\mathbf{b})\bullet\mathbf{b},$$

что для нее выполняется следующее *условие соответствия*:

$$\forall A,B\in\boldsymbol{E}:\ \Pr(A,B)=r(A,B)\bullet B=C:$$
$$\mathbf{a}=\mathbf{dec_E}(A),\ \mathbf{b}=\mathbf{dec_E}(B),\ \mathbf{c}=\mathbf{dec_E}(C), \tag{10}$$
$$\mathbf{c}=\Pr(\mathbf{a},\mathbf{b})=r(\mathbf{a},\mathbf{b})\bullet\mathbf{b};\ r(A,B)=r(\mathbf{a},\mathbf{b}),$$

т.е. *линейная корреляция векторов разложений оказывается равна линейной корреляции исходных образов*. Отсюда следует, что для оценки сходства двух образов A и B может быть использован *нормированный коэффициент линейной корреляции разложений*:

$$K(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \|\Pr(\mathbf{a},\mathbf{b})\|/\|\mathbf{a}\|, \tag{11}$$

где $\mathbf{a}=\mathbf{dec}(A),\mathbf{b}=\mathbf{dec}(B)\in\Theta$, со стандартными свойствами

$$0 \le K(\mathbf{a},\mathbf{b});\ K(\mathbf{a},\mathbf{a})=1;\ K(\mathbf{a},\mathbf{b})=0 \Leftrightarrow \Pr(A,B)=\varnothing.$$

Таким образом, можно утверждать, что вектора разложений из Θ адекватно описывают структурные отношения образов из Ω, что позволяет обоснованно анализировать (сравнивать) образы и модели данного типа, опираясь на их признаковое описание в виде морфологических разложений. Рассмотрим теперь применение этого формализма для описания и конструирования процедур анализа изображений на основе моделей вида (1).

Проективные морфологии изображений

Пусть на проективном пространстве образов $\{\Psi,\Omega,\bullet,\mathbf{V},\mu,\Pr\}$ задана *группа преобразований* $\mathcal{G}(\Omega)$. Алгебраическую систему $\{\Psi,\Omega,\bullet,\mathbf{V},\mu(\Omega),\Pr,\ \mathcal{G}(\Omega)\}$ можно назвать *проективно-геометрическим* *пространством*, если выполняются следующие условия:

$$\tau(a\bullet B)=a\bullet\tau(B);\ \tau(A\vee B)=\tau(A)\vee\tau(B),\quad \Pr(\tau(A),\tau(B))=\tau(\Pr(A,B)), \tag{12}$$

где $a\in\Psi$; $\tau\in\mathcal{G}(\Omega)$; $A,B\in\Omega$. При этом $\mathcal{G}(\Omega)$ имеет смысл множества *геометрических преобразований* образов, тогда как умножение образов на скаляры имеет здесь смысл *яркостных преобразований*. Предположим теперь, что группа преобразований $\mathcal{G}(\Omega)$, является *параметрической*:

$$\mathcal{G}(P)=\{g(\mathbf{p})\in\mathcal{G};\ \mathbf{p}\in P\subseteq R^N\}, \tag{13}$$

где N – размерность *пространства параметров исходных образов* P; $g(\mathbf{0})=\varepsilon$ - тождественное преобразование. Ω также оказывается *параметризованным*:

$$\Omega(P)=\{A(\mathbf{p})=g(\mathbf{p})(A):\ A\in\Omega,\ g(\mathbf{p})\in G;\ \mathbf{p}\in P\subseteq R^N\}. \tag{14}$$

Пусть теперь имеется n-мерный базис разложения $\mathbf{E}(P)=\{\varphi_k(\mathbf{p})\in\Omega\}$, на котором задана еще одна группа преобразований

$$\mathcal{R}(Q)=\{\sigma(\mathbf{q})\in\mathcal{R};\ \mathbf{q}\in Q\subseteq R^M\}, \tag{15}$$

где M – размерность пространства параметров Q, $\sigma(\mathbf{0})=\varepsilon$. Выражение (8), описывающее разложение образа по базису, соответственно примет вид:

$$\Pr(A(\mathbf{p}),\mathbf{E}(\mathbf{p},\mathbf{q}))= =\bigvee_{k=1..n;\ q\in Q}(A(k,\mathbf{q})\bullet\varphi(k,\mathbf{p},\mathbf{q})), \tag{16}$$

где $A(\mathbf{p})$ –*образ* A *в исходном пространстве* P; n – *количество типов примитивов* базиса $\mathbf{E(0)}$; $A(k,\mathbf{q})$ – *представление образа* A *в пространстве параметров разложения* $\{1,\dots,n\}\times Q$, где k – *индикатор типа образующей*. Далее, для простоты обозначений будем считать, что $\mathbf{q}$ включает k:

$$\Pr(A(\mathbf{p}),\mathbf{E}(\mathbf{p},\mathbf{q}))=\bigvee_{q\in Q}(A(\mathbf{q})\bullet\varphi(\mathbf{p},\mathbf{q})). \tag{17}$$

Введем *морфо-геометрическое разложение* образа A как оператор

$$\mathbf{dec}(A(\mathbf{p}))=A(\mathbf{q}):\ \Omega(P)\rightarrow\Theta(Q). \tag{18}$$

Параметризованное пространство разложений $\Theta(Q)$ представляет собой пространство M-мерных массивов-*аккумуляторов*, на котором также определены операции *объединения массивов, умножения массива на скаляр* и задана *норма (модуль) массива.* Определим на $\Theta(Q)$ операцию *проекции разложения на разложение*, такую что

$$\Pr(A(\mathbf{q}),B(\mathbf{q}))=r(A(\mathbf{p}),B(\mathbf{p}))\bullet B(\mathbf{q}), \tag{19}$$

где $A(\mathbf{p}),B(\mathbf{p})\in\mathbf{E}(P)$; $A(\mathbf{q})=\mathbf{dec}(A(\mathbf{p}))$, $B(\mathbf{q})=\mathbf{dec}(B(\mathbf{p}))\in\Theta(Q)$; $r(A(\mathbf{p}),B(\mathbf{p}))$ - линейная структурная корреляция образов $A(\mathbf{p})$ и $B(\mathbf{p})$. *Нормированный коэффициент линейной корреляции разложений* будет иметь вид:

$$K(A(\mathbf{q}),B(\mathbf{q})) = =\|\Pr(A(\mathbf{q}),B(\mathbf{q}))\|/\|A(\mathbf{q})\|. \tag{20}$$

Построенную таким образом проективную морфологию можно назвать *проективной морфологией изображений*.

Заключение

Применительно к структурному анализу цифровых изображений предложен формализм «проективной морфологии изображений».

Проективные морфологии изображений могут быть, в частности, построены на базе таких методов анализа изображений как корреляционный анализ, математическая морфология Серра, морфологический анализ Ю.П. Пытьева, частотные (на базе преобразования Фурье, ДКП, БПФ) и пространственно-частотные методы фильтрации (кратномасштабный вейвлет-анализ).

Основным ограничением всех рассматриваемых в рамках предложенной проективной морфологи методов и подходов является то, что используемый в качестве базового класс структурных моделей с однородными связями позволяет задавать лишь состав входящих в модель элементов и связь между образующими и образом в целом, но не рассматривает связи образующих элементов между собой. Это ограничение является принципиальным, так как модели более общего вида не могут быть однозначно охарактеризованы регулярными массивами или векторами признаков.

Список литературы

1. Гонсалес Р., Вудс Р., Цифровая обработка изображений. М.: Техносфера, 2005. 1072 с.
2. Serra J. Image Analysis and Mathematical Morphology, Academic Press, London, 1982.
3. Пытьев Ю.П. Морфологический анализ изображений. Доклады АН СССР, 1983. Т. 269. № 5. С. 1061-1064.

PROJECTIVE MORPHOLOGIES FOR IMAGE ANALYSIS

Yu. Vizilter, S. Zheltov

State Research Institute of Aviation Systems (GosNIIAS)
7, Victorenko str., Moscow, Russia, 125319; e-mail: viz@gosniias.ru

The framework of "projective image morphology" is proposed as a generalized mathematical approach for uniform description of wide range of low-level and mid-level image analysis procedures. It allows constructing such classes of image analysis procedures like Serra's morphological filters, Pytiev's morphological projectors, linear filers in frequency and spatial-frequency domains based on Fourier and wavelet transforms and so on.

Introduction

The purpose of this work is to state some generalized mathematical approach for uniform description and construction of wide range of low-level and mid-level image analysis procedures. For this purpose let's consider some basic notions of structural image analysis.

Let the *structural image (object) model* will be the combination of some *brightness-geometric elements* with some *brightness-geometric relations*. The *class of structures* will be correspondingly any set of such structural models closed relative to some *structure equivalence relation*. It's known that such equivalence can be generated by some group of *brightness-geometric or structural transforms* determined for general set of structural models.

From this viewpoint any procedure that transforms the image to some given structure class will be the *structural filter*. And if for any arbitrary image such *filtered image* in the given structural class is (a) exists and (b) unique, then one can consider such structural filter as an *operator of structural projection* of images onto the given class of models. So, we can state the equivalence between any class of models and corresponding class of projective operators.

The idea of such equivalence between models and operators is a basis of "projective morphology" described below.

Projective operators in image analysis

Let's consider the mathematical form of representation of image *f* and some projective operators for some popular image analysis techniques (for extended description of these techniques see for example [1]).

Digital image (trivial model):

$$\mathrm{Im}(f,x,y)= \Sigma_{ij}(a_{ij}\bullet\varphi(i,j,x,y)) = \\ = \mathrm{MAX}_{xy}\,(a_{ij}\bullet\varphi(i,j,x,y)),$$

$\varphi(i,j,x,y)$ – pixel indication function

$$\varphi(i,j,x,y)= \{1: x=i,y=j;\ 0: x\neq i,y\neq j\};$$

(x,y) – pixel position; a_{ij} – image brightness at (i,j) position.

Two-dimensional Fourier Transform:

$$\mathrm{FOUR}(f,x,y))=\Sigma_{kj}(a_{kj}\bullet\varphi(\omega_k,\omega_j,x,y)),$$

где ω_k,ω_j.- spatial frequencies,

$\varphi(\omega_k,\omega_j,x,y)=\exp(-i\bullet[x\bullet\omega_k+y\bullet\omega_j]);$

a_{kj} – frequency decomposition coefficients;

i – imagine unit.

Two-dimensional Wavelet Transform:

$$W(f,x,y))=\Sigma_{ij}(a_{ijRn}\bullet\varphi(i,j,R,n,x,y)),$$

$\varphi(0,0,1,n)$ – n-th type wavelet sample, (i,j) – wavelet position, R – scale coefficient; a_{ijRn} – wavelet decomposition coefficients.

Serra's morphological "opening" [2]:

$$O(f,x,y))=\mathrm{MAX}_{ij}(a_{ij}\bullet\varphi(i,j,x,y)),$$

$\varphi(0,0)$ – binary structural element, (i,j) – position of translated (shifted) structural element; $\{a_{ij}\}$– morphological decomposition (*erosion*) of image $f(x,y)$.

Pytiev's morphological image analysis [3]:

$$\mathrm{Pr}_{\mathbf{F}}(f,x,y)=\Sigma_n(a_n\bullet\varphi(n,x,y))= \\ =\mathrm{MAX}_n(a_n\bullet\varphi(n,x,y)),$$

$\varphi(n,x,y)$ – indication function of n-th image constant brightness region $F_n\subseteq\mathbf{F}=\{F_i\}$:

$\varphi(n,x,y)= \{1: (x,y)\in F_n;\ 0: (x,y)\notin F_n\}$,

a_n – average brightness of $f(x,y)$ for F_n region.

So, all these image analysis techniques demonstrate the *unified form of structural projective operators*:

$$A(\mathbf{p})=\bigvee_{q\in Q}(A(\mathbf{q})\bullet\varphi(\mathbf{p},\mathbf{q})), \quad (1)$$

where $\mathbf{p}=(x,y)$ – vector of pixel coordinates; $A(\mathbf{p})=Im(x,y)$ – digital picture as a two-dimensional function of brightness in *image space*; $\varphi(\mathbf{p},\mathbf{q})=\varphi(x,y,\mathbf{q})$ – the set of parameterized *generic functions* (primitives) of certain structural decomposition; $\mathbf{q}$ – vector of generic function *parameters*; $A(\mathbf{q})$ – image of picture in a *parameter space* (accumulator array); '$\bigvee$'$\in\{$'Σ','MAX','Π','MIN'$\}$ – commutative and associative operation of pixel-wise "*conjunction*". This operation may have a sense of summing/multiplication or taking of minimal/maximal values.

Models of type (1) can be referred as "*models with homogeneous links*" or simply "*homogeneous models*" because all elements are included by the common way, confused by one cumulative (commutative and associative) operation, and a model describes just the structural content of image (set of included primitives with their parameters) but not the relations between elements included.

Let's consider the most generic algebraic basics for image processing operations based on such homogeneous structural models.

Projective space of patterns

Let two sorts of elements are given: scalar values (*scalars*) and *patterns*. For the set of scalars Ψ two basic operations are defined: *multiplication* ($\bullet$) and *conjunction* ($\bigvee$). Multiplication determines on Ψ the *group* with 1, conjunction – the commutative and associative semigroup with 0. For the set of patterns Ω the *conjunction* operation ($\bigvee$) is defined too. It determines on Ω the commutative and associative semigroup with «empty pattern» $\varnothing$. Additionally, for scalars from Ψ the "absolute value" operation is defined, and for patterns from Ω the *norm* is defined $\mu=\|A\|:\ \Omega\to R$. The operation of *pattern by scalar multiplication* ($\bullet$) is defined on $\Psi\times\Omega$.

Let's introduce the *projection of pattern to pattern* operation with following properties:

$$\begin{aligned}&Pr(A,B)\in\Omega;\ Pr(A,B)=Pr(Pr(A,B),B);\\ &Pr(A,A)=A;\ Pr(\varnothing,A)=\varnothing;\\ &Pr(A,\varnothing)=\varnothing;\ Pr(a\bullet A,B)=a\bullet Pr(A,B);\\ &\forall a\neq 0:\ Pr(A,a\bullet B)=Pr(A,B),\end{aligned} \quad (2)$$

$a\in\Psi;\ A,B,\varnothing\in\Omega$.

The *linear projector* will be the projective operator (2) of the following form:

$$Pr(A,B)=r(A,B)\bullet B \quad (3)$$

where $r(A,B)$ is a coefficient of *linear correlation* with following properties:

$$\begin{aligned}&r(A,A)=1;\ r(\varnothing,A)=0;\ r(\alpha A,B)=\alpha\bullet r(A,B);\\ &\forall\alpha\neq 0:\ r(A,\alpha\bullet B)=r(A,B)/\alpha,\end{aligned} \quad (4)$$

$A,B\in\Omega,\ r(A,B),\alpha\in\Psi$.

The structural-correlation function

$$r(A,B):\ \Omega\times\Omega\to\Psi$$

represents here in some evident form the system of pairwise relations of *structural closeness* of patterns depending on the semantic features of corresponding objects in the real world. This allows to introduce the following standard mathematical measure of pattern closeness – *normalized coefficient of linear correlation*:

$$K(A,B) = \|Pr(A,B)\|/\|A\|, \quad (5)$$

$A,B\in\Omega$; with following properties:

$$0\leq K(A,B);\ K(A,A)=1;$$
$$K(A,B)=0 \Leftrightarrow Pr(A,B)=\varnothing.$$

Taking in account all these constructions defined, the space of patterns Ω could be referred as a "*projective space of patterns*".

Projective morphological decompositions

Let some set of patterns $\mathbf{B}=\{B_k\}\subseteq\Omega$ is given. The operations of patterns conjunction and multiplication by scalar determine for $\mathbf{B}$ linear subspace $\boldsymbol{B}\subseteq\Omega$, and for $\forall A\in\boldsymbol{B}$:

$$A=\bigvee_{k=1..n}(a_k\bullet B_k), \quad (6)$$

where $\mathbf{a}=\{a_k\}$ – vector of *weights of generics* from $\mathbf{B}$ in given pattern A; n – number of generics in a model corresponding to this subspace. If all patterns in $\mathbf{B}$ are the *linear-independent*, the set $\mathbf{B}$ can be referred as a *basis of structural description*, its elements will be the *structural primitives*, and n – the *dimension of basis*.

This allows defining the *projection of pattern to subspace*:

$$\begin{aligned}&Pr(A,\boldsymbol{B})\in\boldsymbol{B};\ Pr(A,\boldsymbol{B})=Pr(Pr(A,\boldsymbol{B}),\boldsymbol{B});\\ &Pr(\varnothing,\boldsymbol{B})=\varnothing;\ Pr(a\bullet A,\boldsymbol{B})=a\bullet Pr(A,\boldsymbol{B}),\end{aligned} \quad (7)$$

$a\in\Psi;\ A,\varnothing\in\Omega;\ \boldsymbol{B}\subseteq\Omega$.

Let's consider some basis $\mathbf{E}$ of dimension n, such that the projection (7) of any pattern

$A \in \Omega$ onto the subspace $\boldsymbol{E}$ satisfies the following *condition of decomposition ability:*

$$\Pr(A,\boldsymbol{E}) = \mathrm{V}_{k=1..n}(\Pr(A,E_k)) = \mathrm{V}_{k=1..n}(r(A,E_k)\bullet E_k), \quad (8)$$

i.e. *the projection of pattern to the subspace is represented as a conjunction of linear projections on the elements of its basis*.

Such basis (8) allows defining the operation of *morphological pattern decomposition* as an operation of imaging from pattern space to the space of feature vectors of dimension n:

$$\mathbf{dec_E}(A)=\{r(A,E_1),\ldots,r(A,E_n)\}; \quad \mathbf{dec_E}: \Omega\rightarrow\Psi^n. \quad (9)$$

The algebraic system $\{\Psi,\Omega,\bullet,\mathbf{V},\mu,\Pr,\mathbf{E}\}$ satisfying condition (8) can be referred as *projective morphology* on Ω. Basis $\mathbf{E}$ will be correspondingly the *basis of morphological decomposition.*

The *space of morphological decompositions* $\Theta=\Psi^n\subseteq R^n$ for any decomposition basis $\mathbf{E}$ will be the *projective vector space* with corresponding *vector norm* and operators of *vector conjunction, vector multiplication by scalar, projection of vector to vector* and so on. Moreover, in the space of morphological decompositions Θ the projection of vector to vector

$$\Pr(\mathbf{a},\mathbf{b})=r(\mathbf{a},\mathbf{b})\bullet\mathbf{b},$$

can be always defined for satisfying the following *condition of correspondence*:

$$\forall A,B\in\boldsymbol{E}: \Pr(A,B)=r(A,B)\bullet B=C: \quad \mathbf{a}=\mathbf{dec_E}(A),\ \mathbf{b}=\mathbf{dec_E}(B),\ \mathbf{c}=\mathbf{dec_E}(C), \quad \mathbf{c}=\Pr(\mathbf{a},\mathbf{b})=r(\mathbf{a},\mathbf{b})\bullet\mathbf{b};\ r(A,B)=r(\mathbf{a},\mathbf{b}), \quad (10)$$

i.e. *linear correlation of decomposition vectors is equivalent to linear correlation of source patterns*. This means that the comparison of two patterns can be performed in a space of decompositions using the *normalized coefficient of linear correlation of decomposition vectors*:

$$K(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \|\Pr(\mathbf{a},\mathbf{b})\|/\|\mathbf{a}\|, \quad (11)$$

$\mathbf{a}=\mathbf{dec}(A)$,$\mathbf{b}=\mathbf{dec}(B)\in\Theta$, with standard features

$$0 \le K(\mathbf{a},\mathbf{b});\ K(\mathbf{a},\mathbf{a})=1;\ K(\mathbf{a},\mathbf{b})=0 \Leftrightarrow \Pr(A,B)=\varnothing.$$

So, one can state that decomposition vectors from Θ provide the *adequate description* of structural relations between patterns from Ω. This proposition allows comparing both patterns and models based on their projective morphological descriptors (decomposition vectors). Let's consider the application of this morphological formalism to description and construction of image analysis procedures based on models of type (1).

Projective morphologies of images

Let on the projective morphology $\{\Psi,\Omega,\bullet,\mathbf{V},\mu,\Pr\}$ some additional *group of transforms* $\mathcal{G}(\Omega)$ is defined. The algebraic system $\{\Psi,\Omega,\bullet,\mathbf{V},\mu(\Omega),\Pr,\mathcal{G}(\Omega)\}$ can be referred as *projective-geometric space*, if following conditions are satisfied:

$$\tau(a\bullet B)=a\bullet\tau(B);\ \tau(A\mathrm{V}B)=\tau(A)\mathrm{V}\tau(B), \quad \Pr(\tau(A),\tau(B))= \tau(\Pr(A,B)), \quad (12)$$

$a\in\Psi$; $\tau\in\mathcal{G}(\Omega)$; $A,B\in\Omega$. Here $\mathcal{G}(\Omega)$ corresponds to *geometric transforms* of patterns, and multiplication by scalars corresponds to *brightness (color) transforms*.

Let's suppose that transform group $\mathcal{G}(\Omega)$ is a *parameterized group*:

$$\mathcal{G}(P)=\{g(\mathbf{p})\in\mathcal{G};\ \mathbf{p}\in P\subseteq R^N\}, \quad (13)$$

where N – dimension of *source patterns parameter space* P; $g(\mathbf{0})=\varepsilon$ - stable transform. Then the Ω space will be *parameterized* too:

$$\Omega(P)=\{A(\mathbf{p})=g(\mathbf{p})(A): A\in\Omega,\ g(\mathbf{p})\in G;\ \mathbf{p}\in P\subseteq R^N\}. \quad (14)$$

Let there are the n-dimensional basis of decomposition $\mathbf{E}(P)=\{\varphi_k(\mathbf{p})\in\Omega\}$ and one more parameterized transform group $\mathcal{R}(Q)$ on it:

$$\mathcal{R}(Q)=\{\sigma(\mathbf{q})\in\mathcal{R};\ \mathbf{q}\in Q\subseteq R^M\}, \quad (15)$$

where M – dimension of *parameter space* Q; $\sigma(\mathbf{0})=\varepsilon$ - stable transform. In this case the condition of decomposition ability (8) will take the following form:

$$\Pr(A(\mathbf{p}),\mathbf{E}(\mathbf{p},\mathbf{q}))= =\mathrm{V}_{k=1..n;\ q\in Q}(A(k,\mathbf{q})\bullet\varphi(k,\mathbf{p},\mathbf{q})), \quad (16)$$

Where $A(\mathbf{p})$ –*pattern* A *in initial space* P; n – *number of primitives* in basis $\mathbf{E(0)}$; $A(k,\mathbf{q})$ – *representation of pattern* A *in a space of decomposition parameters* $\{1,\ldots,n\}\times Q$; k – *indicator of primitive type*. Below for simplicity let's consider $\mathbf{q}$ including k:

$$\Pr(A(\mathbf{p}),\mathbf{E}(\mathbf{p},\mathbf{q}))=\mathrm{V}_{q\in Q}(A(\mathbf{q})\bullet\varphi(\mathbf{p},\mathbf{q})). \quad (17)$$

Let's introduce the *morphogeometrical decomposition* of pattern A as an operator

$$\mathbf{dec}(A(\mathbf{p}))=A(\mathbf{q}): \Omega(P)\rightarrow\Theta(Q). \quad (18)$$

The *parameterized space of morphological decompositions* $\Theta(Q)$ can be imagined as a space of M-dimensional accumulator arrays with corresponding *array norm* and operators of *array conjunction, array multiplication by scalar, projection of array to array* and so on. Let's define on $\Theta(Q)$ the operation of *projection of decomposition on decomposition* such that

$$\mathrm{Pr}(A(\mathbf{q}),B(\mathbf{q}))=r(A(\mathbf{p}),B(\mathbf{p}))\bullet B(\mathbf{q}), \qquad (19)$$

where $A(\mathbf{p}),B(\mathbf{p})\in\mathbf{E}(P)$; $A(\mathbf{q})=\mathbf{dec}(A(\mathbf{p}))$, $B(\mathbf{q})=\mathbf{dec}(B(\mathbf{p}))\in\Theta(Q)$; $r(A(\mathbf{p}),B(\mathbf{p}))$ – linear structural correlation between $A(\mathbf{p})$ and $B(\mathbf{p})$. The *normalized coefficient of linear correlation of decomposition arrays* will have the form:

$$K(A(\mathbf{q}),B(\mathbf{q})) = \\ = \|\mathrm{Pr}(A(\mathbf{q}),B(\mathbf{q}))\|/\|A(\mathbf{q})\|. \qquad (20)$$

Such projective morphologies based on parameterized groups of geometrical transforms of images and structural elements can be referred as *projective morphologies of images*.

Conclusion

The new framework of “projective morphology of images” is proposed both for construction of different morphological filters and for morphological comparison of images and structural object models.

Projective morphologies can be constructed, in particular, based on such classes of image analysis procedures like Serra’s morphological filters, Pytiev’s morphological projectors, linear filers in frequency and spatial-frequency domains based on Fourier and wavelet transforms and so on.

The main limitation of all image analysis techniques described in this framework proposed is a homogeneity of basic structural model. It allows just to describe the structural content of image (set of included primitives with their parameters) but not the relations between elements included. This limitation seems to be principal because the models of more generic type could not be characterized by regular feature vectors and arrays.

References

1. Gonzalez R., Woods R., Digital Image Processing. Prentice Hall, New Jersey, 2002.
2. Serra J. Image Analysis and Mathematical Morphology, Academic Press, London, 1982.
3. Zheltov S.Yu., Vizilter Yu.V., Stepanov A.A. Shape analysis using Pytiev morphologic paradigm, its use in machine vision. – SPIE Proceedings, 1994, vol. 2350.