Визильтер Ю.В., Желтов С.Ю. ***(ФГУП "Государственный научно-исследовательский институт авиационных систем", Москва)***

Сравнение и локализация фрагментов изображений с использованием проективных морфологий[1]

Описан формализм проективной морфологии изображений. Разработана общая схема сравнения и геометрической привязки фрагментов изображений на основе их морфологических разложений. Исследованы свойства морфологических корреляционных мер и соответствующих процедур анализа изображения.

Keywords: Image processing; Mathematical Morphology; Image Matching.

Введение

Задача сравнения и взаимной геометрической привязки фрагментов изображений в условиях присутствия различного рода помех, а также ряда регулярных яркостно-геометрических преобразований, описывающих канал регистрации изображения реальной сцены – одна из основных классических задач машинного зрения. В англоязычной литературе для описания этой группы задач используется обобщающий термин *image matching*. В технической литературе на русском языке чаще всего используются термины «привязка», «обнаружение» или «установление соответствия».

На практике данная задача чаще всего возникает в следующих случаях:

- при взаимной привязке изображений одной и той же сцены (местности), полученных в различное время и в различных условиях регистрации (время года, время суток, погодные условия, дальность и угол съемки);
- при взаимной привязке двух и более перекрывающихся изображений одной и той же сцены (одного и того же объекта), полученных при помощи нескольких камер (задача *стереоотождествления*);
- при геометрической привязке последовательности перекрывающихся изображений одной и той же сцены (местности), полученных при помощи движущейся камеры (например, при облете местности на летательном аппарате; при съемке с движущегося наземного транспортного средства или другой мобильной платформы; при съемке купольной камерой видеонаблюдения в режиме сканирования области наблюдения и т.п.);
- при взаимной привязке набора изображений сцены, полученного от нескольких датчиков различной физической природы (ТВ, ИК, ЛЛ и других);
- при решении задачи обнаружения и идентификации на изображении некоторого целевого объекта известного типа, заданного одним или несколькими эталонными изображениями.

Традиционная техника сравнения изображения с эталоном основывается на непосредственном сравнении изображений как двумерных функций яркости (дискретных двумерных матриц интенсивности). При этом измеряется либо расстояние между изображениями, либо мера их близости. Такая техника получила название «корреляционного обнаружения». В настоящее время она является наиболее широко известной, используемой и изученной, однако обладает рядом недостатков и ограничений, заставляющих исследователей в области обработки и анализа изображений постоянно искать другие подходы к сравнению изображений, основанные не на сравнении функций яркости, а на более содержательном *структурном* описании.

---

[1] *Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 05-08-18234-а.*

Одним из наиболее интересных вариантов развития идей корреляционного обнаружения с использованием содержательных структурных эталонов является морфологический проекционный подход, предложенный Ю.П. Пытьевым [1,2].

Столь же содержательные и при этом совершенно различные по своим природе и свойствам структурные модели изображений и объектов позволяет строить также математический аппарат таких современных методов анализа изображений как:

- *математическая морфология Серра* (ММ), классическое описание которой дано в работах Серра [3,4];
- *методы голосования*, восходящие к *преобразованию Хафа*, первоначально описанному Хафом [5], и *обобщенному преобразованию Хафа*, предложенному Баллардом [6,7] и затем развитые Дэвисом [8,9].
- *частотные методы* на базе двумерных *преобразований Фурье* (включая БПФ, ДКП и др.) [10];
- *пространственно-частотные* методы, такие как *кратномасштабный вейвлет-анализ* [10]*;*
- методы распознавания на базе различных *линейных ортогональных разложений* (например, метод «собственных изображений») и т.п.

В данной статье предпринята попытка создания единого математического формализма *морфологического сравнения изображений* для описания существующих и разработки новых методов и алгоритмов привязки изображений на основе их структурного описания. Предлагаемый формализм является расширением и обобщением формализма монотонной проективной морфологии, предложенного ранее в статье [11].

1. Структурное описание и сравнение образов

1.1. Яркостно-геометрические модели процедур структурного анализа изображений

Рассмотрим представления значений изображения f в точке (x,y), используемые в ряде популярных методов анализа двумерных данных.

Цифровое изображение (тривиальное пиксельное описание):

$$Im(f,x,y)= \Sigma_{ij}(a_{ij}*\varphi(i,j,x,y)) = MAX_{xy}\,(a_{ij}*\varphi(i,j,x,y)),$$

где $\varphi(i,j,x,y)$ – индикаторная функция отдельного пикселя вида

$$\varphi(i,j,x,y)= \{1: x=i,y=j;\ 0: x\neq i,y\neq j\};$$

(x,y) – положение пикселя; a_{ij} – значение цифрового изображения в точке (i,j). Данное формальное описание (разбиение) изображения соответствует корреляционному сравнению изображений как функций яркости.

Дискретное косинусное преобразование Фурье:

$$FUR(f,x,y))=\Sigma_{ij}(a_{ij}*\varphi(\omega_i,\omega_j,x,y)),$$

где ω_i,ω_j.- пространственные частоты, $\varphi(\omega_i,\omega_j,x,y)= \cos(\omega_i,ix)*\cos(\omega_j,iy)$; a_{ij} – коэффициент разложения Фурье.

Кратномасштабное вейвлет-преобразование:

$$W(f,x,y))=\Sigma_{ij}(a_{ijRn}*\varphi(i,j,R,n,x,y)),$$

где $\varphi(0,0,1,n)$ – эталонный вейвлет n-го типа, (i,j) – положение вейвлета, R – коэффициент масштаба; a_{ijRn} – коэффициент вейвлет-преобразования.

Морфологическое открытие:

$$O_M(f,x,y))=MAX_{ij}(a_{ij}*\varphi(i,j,x,y)),$$

где $\varphi(0,0)=\{0,1\}$ – эталонный *бинарный* структурирующий элемент, (i,j) – положение структурирующего элемента; $\{a_{ij}\}$– результат *эрозии* изображения f(x,y).

Кратномасштабное морфологическое открытие:

$$O_{MM}(f,x,y))=MAX_{ij}(a_{ijRn}*\varphi(i,j,R,n,x,y)),$$

где $\varphi(0,0,1,n)=\{0,1\}$ – эталонный *бинарный* структурирующий элемент n-го типа, (i,j) – положение структурирующего элемента, R – коэффициент масштаба; a_{ijRn} – результат кратномасштабной эрозии изображения f(x,y).

Морфология на базе преобразования Хафа (HT):

$$O_{HT}(f,x,y))= MAX_{ij}(a_{ij}*\varphi(\rho_i,\theta_j,x,y)),$$

где (ρ_i,θ_j) – параметры нормальной параметризации прямой, $\varphi(\rho_i,\theta_j)$ – прямая линия с соответствующими параметрами; $\{a_{ij}\}$ – содержимое бинаризованного аккумулятора преобразования Хафа.

Морфология на базе преобразования Хафа в скользящем окне (Local HT):

$$O_{LHT}(f,x,y))=MAX_{ij\theta}(a_{ij\theta}*\varphi(i,j,\theta,x,y)),$$

где $\varphi(0,0,0)$ – эталонный *структурирующий элемент в виде прямолинейного отрезка фиксированного размера*, (i,j) – положение центра структурирующего элемента, θ – угол поворота отрезка; $\{a_{ij\theta}\}$ – содержимое бинаризованного аккумулятора преобразования Хафа в скользящем окне.

Морфологическое сравнение изображений Ю.П.Пытьева:

$$Pr_{\mathbf{F}}(f,x,y)=\Sigma_n(a_n*\varphi(n,x,y)),$$

где $\varphi(n,x,y)$ – индикаторная функция n-й области разбиения кадра $F_n\subseteq\mathbf{F}=\{F_i\}$ на участки однородной яркости вида:

$$\varphi(n,x,y)= \{1: (x,y)\in F_n;\ 0: (x,y)\notin F_n\};$$

a_n – средняя яркость изображения $f(x,y)$по области F_n.

Таким образом, во всех случаях просматривается следующая единая схема *структурного представления изображения*:

$$A(\mathbf{p})=\vee_{q\in Q}(A(\mathbf{q})\bullet\varphi(\mathbf{p},\mathbf{q})), \qquad (1)$$

где $\mathbf{p}=(x,y)$ – вектор пиксельных координат в исходном пространстве изображения; $A(\mathbf{p})=Im(x,y)$ – анализируемое изображение, заданное как двумерная скалярная функция интенсивности сигнала (яркости); $\varphi(\mathbf{p},\mathbf{q})=\varphi(x,y,\mathbf{q})$ – набор образующих (примитивов) данного структурного разложения, также заданных как параметризованные двумерные функции яркости; $\mathbf{q}$ – вектор параметров элемента разложения; $A(\mathbf{q})$ – образ изображения в пространстве параметров (*массив-аккумулятор*); '$\vee$'$\in${'Σ','MAX','Π','MIN'} – коммутативная и ассоциативная операция *попиксельного* (поэлементного) объединения элементов изображения, которая может иметь смысл либо сложения/умножения элементов, либо взятия максимального/минимального значения.

Модели типа (1) можно назвать *моделями с однородной структурой связей* или просто *однородными моделями,* так как все образующие элементы входят в состав модели одним и тем же способом, объединяются при помощи некоторой кумулятивной (коммутативной и ассоциативной) операции, а модель описывает лишь структурный состав образа, но не отношения между его элементами.

Рассмотрим, какова алгебраическая структура класса однородных моделей, и как с его помощью могут решаться задачи сравнения образов (отождествление), сравнения образа с моделью (распознавание) и локализации образа или модели на изображении (matching).

1.2. Проективное пространство образов

Пусть имеется два сорта элементов: *скаляры* и *образы*. На множестве скаляров Ψ определены две операции – *умножение* ($\bullet$) и *объединение* ($\vee$). Умножение определяет на множестве Ψ группу с 1, объединение – полугруппу с 0. Образы принимают значения на множестве Ω, на котором также определена операция *объединения* ($\vee$), задающая на Ω полугруппу с «нулевым образом» $\varnothing$. Кроме этого, на множестве образов Ω определена *норма* μ: $\Omega\rightarrow R$. В дальнейшем мы также будем использовать более привычное обозначение нормы образа $\mu(A)=\|A\|$.

Пусть теперь операция *умножения образа на скаляр* определена таким образом, что выполняются следующие свойства *линейной комбинации образов*:

$$aA=Aa\in\Omega;\ (ab)A=r(bA);\ A\bullet1=A;$$

$$A\bullet0=\varnothing;\ a\bullet\varnothing=\varnothing;\ \mu(aA)=|a|\bullet\mu(A); \qquad (2)$$

$A(b\vee c)=Ab\vee Ac$; $r(B\vee C)=aB\vee aC$,
где $0,1,a,b,c,d\in\Psi$; $A,B,C,\varnothing\in\Omega$.

Введем операцию *проекции образа на образ*, обладающую следующими свойствами:

$$Pr(A,B)\in\Omega;\ Pr(A,B)=Pr(Pr(A,B),B);$$
$$Pr(A,A)=A;\ Pr(\varnothing,A)=\varnothing;\ Pr(A,\varnothing)=\varnothing; \qquad (3)$$
$$Pr(a\bullet A,B)=a\bullet Pr(A,B);\ \forall a\neq 0:\ Pr(A,a\bullet B)=Pr(A,B);$$

где $a\in\Psi$; $A,B,\varnothing\in\Omega$.

Как видно, в общем случае оператор проекции асимметричен, в нем различаются *проектируемый образ* (A) и *образ, на который осуществляется проектирование* (B).

Назовем *линейным проектором* оператор проекции следующего вида:

$$Pr(A,B)=r(A,B)\bullet B, \qquad (4)$$

где $r(A,B)$ – коэффициент *линейной корреляции*, удовлетворяющий следующим свойствам:

$$r(A,A)=1;\ r(\varnothing,A)=0;$$
$$r(\alpha A,B)=\alpha\bullet r(A,B); \qquad (5)$$
$$r(A,\alpha B)=r(A,B),$$

$A,B\in\Omega$, $r(A,B),\alpha\in\Psi$.

То, что оператор (4) является оператором проекции в смысле (3) легко проверяется непосредственной подстановкой (4) и (5) в условия (3).

Как видно, структурно-корреляционная функция $r(A,B):\{A,B\}\to\Psi$ задает здесь в явном виде систему парных отношений *структурного сходства* или *структурной близости* образов, отражающую в каждом конкретном случае семантические свойства образов предметной области. Это позволяет ввести следующую стандартную меру близости двух образов, инвариантную к их линейному преобразованию (умножению на скаляр) – *нормированный коэффициент линейной корреляции*:

$$K(A,B) = \|Pr(A,B)\|/(\|A\|\bullet\|B\|)= \|r(A,B)\|/\|A\|, \qquad (6)$$

$A,B\in\Omega$; со следующими свойствами:

1) $0 \le K(A,B)$;
2) $K(A,A)=1$.
3) $K(A,B)=0 \Leftrightarrow Pr(A,B)=\varnothing$.

Таким образом, мы можем охарактеризовать Ω как замкнутое относительно перечисленных операций с образами и скалярами нормированное пространство, на котором определен оператор проекции. Такое пространство можно назвать *проективным пространством образов*. В частном случае, когда оператор **V** образует абелевы группы и на Ψ, и на Ω, данное однородное пространство становится классическим линейным пространством, свойства которого хорошо известны. При этом, если в таком пространстве определено скалярное произведение, коэффициент линейной корреляции (3) может рассматриваться как коэффициент Фурье, определяемый из условия минимума нормы проекции.

1.3. Проективная морфология

Пусть задано некое произвольное множество образов $\mathbf{B}\subseteq\Omega$. Очевидно, что благодаря свойствам линейной комбинации образов (2) операции объединения образов и умножения образа на число образуют над множеством **B** замкнутое линейное подпространство $\boldsymbol{B}\subseteq\Omega$, такое, что любой образ, принадлежащий этому подпространству, может быть представлен в форме

$$A=\vee_{k=1..n}(a_k B_k), \qquad (7)$$

где A – описываемый структурный образ, $\mathbf{B}=\{B_k\}$ – множество входящих в данный образ структурных *примитивов* или *образующих*, $\mathbf{a}=\{a_k\}$ – вектор *весов образующих*, характеризующий степень связи (способ вхождения) образующих из **B** в данный конкретный образ A, n – количество образующих, входящих в данную модель.

Если любые два образа из **B** являются *линейно независимыми*, то есть

$\forall B_i,B_k \in \mathbf{B},\ k\neq i:\ \forall\alpha\in\Psi:\ B_i\neq\alpha B_k,$ (8)

тогда множество **B** можно назвать *базисом структурного описания*, элементы этого множества – *структурными примитивами*, а количество структурных примитивов n – соответственно *размерностью базиса*.

Определим операцию *проекции образа на подпространство*, такую что:

$\mathrm{Pr}(A,\boldsymbol{B})\in\boldsymbol{B};\ \mathrm{Pr}(A,\boldsymbol{B})=\mathrm{Pr}(\mathrm{Pr}(A,\boldsymbol{B}),\boldsymbol{B});$

$\mathrm{Pr}(\varnothing,\boldsymbol{B})=\varnothing;\ \mathrm{Pr}(a\bullet A,\boldsymbol{B})=a\bullet\mathrm{Pr}(A,\boldsymbol{B}),$ (9)

где $a\in\Psi$; $A,\varnothing\in\Omega$; $\boldsymbol{B}\subseteq\Omega$.

Пусть теперь существует такой базис примитивов **E** размерности n, что проекция любого образа из Ω на замыкание ***E*** удовлетворяет следующему *условию разложимости:*

$\mathrm{Pr}(A,\boldsymbol{E}) = \bigvee_{k=1..n}(\mathrm{Pr}(A,E_k)) = \bigvee_{k=1..n}(r(A,E_k)\bullet E_k).$ (10)

То есть *проекция образа на базис есть объединение проекций на его элементы*.

Поскольку любому произвольному образу $A\in\Omega$ может быть поставлен в соответствие структурный вектор признаков $\mathbf{a}=\{r(A,E_k)\}$, каждый элемент которого является коэффициентом структурной корреляции данного образа с одним из структурных примитивов, это позволяет определить *операцию морфологического разложения образа по базису* (*decomposition*) как операцию отображения из пространства образов в пространство векторов признаков размерности n:

$\mathbf{dec_E}(A)=\mathbf{a}(A,\mathbf{E}):\ A\in\Omega\rightarrow\Psi^n.$ (11)

Алгебраическую систему $\{\Psi,\Omega,\bullet,\mathbf{V},\mu,\mathrm{Pr},\mathbf{E}\}$, для которой справедливо условие (10), будем далее называть *проективной морфологией* на Ω. Базис **E** является здесь соответственно *базисом морфологического разложения. Пространство векторов разложений* $\Theta=\Psi^n\subseteq R^n$ по некоторому базису разложения **E** представляет собой проективное векторное пространство, на котором определены операции *объединения векторов, умножения вектора на скаляр, проекции вектора на вектор* и задана *норма (модуль) вектора*:

$\mathbf{a}\vee\mathbf{b}=\{a_1,a_2,..,a_n\}\vee\{b_1,b_2,..,b_n\}=\{a_1\vee b_1,\ a_2\vee b_2,..,a_n\vee b_n\}$

$a\bullet\mathbf{b}=a\bullet\{b_1,b_2,..,b_n\}=\{a\bullet b_1,\ a\bullet b_2,..,a\bullet b_n\},$ (12)

$\mathrm{Pr}(\mathbf{a},\mathbf{b})=\alpha(\mathbf{a},\mathbf{b})\bullet\mathbf{b},$

$\mu(\mathbf{a})\geq 0;\ \mu(\mathbf{0})=0;\ \mu(\mathbf{a}\vee\mathbf{b})\leq\mu(\mathbf{a})+\mu(\mathbf{b}),\ \mu(a\mathbf{b})=|a|\bullet\mu(\mathbf{b}),$

где $a,\alpha\in\Psi$; $\mathbf{a},\mathbf{b}\in\Theta$. В дальнейшем мы также будем использовать более привычное обозначение нормы вектора $\mu(\mathbf{a})=\|\mathbf{a}\|$.

Веденные таким образом морфологические разложения обладают рядом важных и практически значимых свойств. Важнейшим из них является следующее. Пусть в пространстве Ω существует операция проекции $\mathrm{Pr}(A,B)$, удовлетворяющая свойствам (3)-(5) и существует разложение $\mathbf{dec_E}$, описываемое свойствами (10)-(12), тогда в пространстве разложения Θ может быть однозначно задана операция проекции вектора разложения на вектор разложения

$\mathrm{Pr}(\mathbf{a},\mathbf{b})=r(\mathbf{a},\mathbf{b})\bullet\mathbf{b},$

удовлетворяющая условиям (2)-(4), такая, что выполняется следующее *условие соответствия*:

$\forall A,B,C\in\boldsymbol{E}:\ C=\mathrm{Pr}(A,B)=r(A,B)\bullet B:\ \mathbf{a}=\mathbf{dec_E}(A),\ \mathbf{b}=\mathbf{dec_E}(B),\ \mathbf{c}=\mathbf{dec_E}(C),$

$\mathbf{c}=\mathrm{Pr}(\mathbf{a},\mathbf{b})=r(\mathbf{a},\mathbf{b})\bullet\mathbf{b};\ r(A,B)=r(\mathbf{a},\mathbf{b}).$ (13)

Докажем это утверждение. Подставляя (8) в (11), имеем:

$\mathrm{Pr}(A,B)=r(A,B)\bullet B = r(A,B)\bullet(\bigvee_{k=1..n}(b_kE_k)) = \bigvee_{k=1..n}(r(A,B)\bullet b_k\bullet E_k),$

откуда

$\mathbf{dec}(\mathrm{Pr}(A,B)) = r(A,B)\bullet\mathbf{dec}(B),$

что и требовалось доказать. То есть *линейная корреляция векторов разложений оказывается равна линейной корреляции исходных образов*.

Для оценки близости двух образов A и B в пространстве векторов разложений может быть использован инвариантный относительно умножения образа на скаляр *нормированный коэффициент линейной корреляции разложений*:

$K(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \|Pr(\mathbf{a},\mathbf{b})\|/(\|\mathbf{a}\|\bullet\|\mathbf{b}\|)= \|r(\mathbf{a},\mathbf{b})\|/\|\mathbf{a}\|$, (14)

где $\mathbf{a}=\mathbf{dec}(A),\mathbf{b}=\mathbf{dec}(B)\in\Theta$, со следующими свойствами:

1) $0 \le K(\mathbf{a},\mathbf{b})$;
2) $K(\mathbf{a},\mathbf{a})=1$.
3) $K(\mathbf{a},\mathbf{b})=0 \Leftrightarrow Pr(A,B)=\varnothing$.

Таким образом, можно утверждать, что вектора разложений из Θ адекватно описывают структурные отношения образов из Ω, что позволяет обоснованно анализировать (сравнивать) образы и модели данного типа, опираясь на их признаковое описание в виде векторов морфологических разложений.

1.4. Типы проективных морфологий

Поскольку в общем случае оператор, сконструированный путем объединения проекций согласно выражению (10), не всегда является проектором в смысле условий (9), то для того, чтобы гарантировать их выполнение, необходимо наложить дополнительные условия либо на операцию объединения, либо на вид оператора проекции, либо на способ формирования системы примитивов. Соответственно будут определены различные типы морфологических разложений с различными свойствами. Можно выделить два основных типа таких разложений: монотонные и ортогональные.

Монотонные разложения

Пусть множество Ω представляет собой *решетку*, то есть частично упорядоченное множество, в котором для любых двух элементов $A,B\in\Omega$ объединение $A\vee B$ является их *точной верхней границей*, а также можно указать их *точную нижнюю границу* $A\wedge B$. Это позволяет определить для элементов решетки Ω *отношение включения*:

$\forall A,B\in\Omega$: $A\subseteq B \Leftrightarrow A\vee B=B$, $\|A\|\le\|B\|$. (15)

Наложим теперь на операцию проектирования два дополнительных требования:

(19) *сохранения включения*:

$\forall A,B,C\in\Omega$, $A\subseteq B \Leftrightarrow Pr(A,C) \subseteq Pr(B,C)$. (16)

(1) *монотонности*:

$\forall A,B\in\Omega$, $Pr(B,A) \subseteq Pr(A,A)=A$. (17)

Условия (15)-(17) являются *достаточными* для выполнения условия (10), то есть *в случае, когда пространство образов является алгебраической решеткой, любой базис примитивов является базисом морфологического разложения*.

Следует отметить, что в силу условия (14) морфологические разложения являются избыточными. Избыточность сообщает им дополнительную устойчивость к возможным шумам и искажениям, в то же время с неоднозначностью (неединственностью) монотонных разложений на практике может быть связан ряд проблем.

Ортогональные разложения

Назовем *ортогональными* любые два образа $A,B\in\Omega$, такие что

$A\perp B \Leftrightarrow \{Pr(A,B)=\varnothing;\ Pr(B,A)=\varnothing\}$. (18)

Ортогональным базисом примитивов будет являться такой базис примитивов **E**, в котором:

$\forall E_i,E_k\in\mathbf{E}$, $k\ne i$: $E_i\perp E_k$. (19)

В этом случае вектор коэффициентов проекции из выражения (11) становится вектором *ортогонального морфологического разложения* образа A по базису **E**.

Наложим теперь на операцию проектирования образа на образ следующее дополнительное требование *сохранения объединения*:

$\forall A,B,C\in\Omega,\ A\vee B \Leftrightarrow Pr(A\vee B,C)= Pr(A,C) \vee Pr(B,C).$ (20)

Условия (19)-(20) являются *достаточными* для выполнения условия (10), то есть *любой ортогональный базис примитивов является базисом морфологического разложения*. При этом ортогональное разложение является единственным.

Если некоторое разбиение исходно является монотонным, то в случае выбора ортогонального базиса оно становится *разбиением*, т.е. разложением, являющимся одновременно и ортогональным и монотонным.

1.5. Сравнение образов с моделями

Рассмотрим задачу сравнения (определения степени сходства) однородных структур. Пусть *модель образа* задана в виде однородного разложения (10).

Назовем *индикатором структурной связи* характеристическую функцию вида:

$\chi(x)=\{0$, если $\|x\|=0$; 1 – в противном случае$\}$.

Определим *характеристический базис* образа B как

$\mathbf{E}_\chi(B)=\{\chi(b_k)\bullet E_k,\ E_k\in\mathbf{E}\},$ (21)

где $\mathbf{E}$ – некоторый исходный базис морфологического разложения. Тогда *морфологическую проекцию образа* A *на модель образа* [B] можно определить как

$Pr(A,[B]) = \bigvee_{k=1..n}(a_k\bullet\chi(b_k)\bullet E_k) = Pr(A,\boldsymbol{E}_\chi(B)).$ (22)

При этом линейное замыкание характеристического базиса $\boldsymbol{E}_\chi(B)\subseteq\Omega$ можно рассматривать как полное множество образов, имеющих такую же структуру, как образ B.

Соответствующая операция проектирования векторов разложения будет иметь вид:

$Pr(\mathbf{a},[\mathbf{b}]) = Pr(\{a_k\},[\{b_k\}]) = \{a_k\bullet\chi(b_k)\}.$ (23)

Если выполняется следующее естественное условие

$\forall k\colon a_k\ge b_k \Rightarrow \mu(\mathbf{a})\ge\mu(\mathbf{b}),$

тогда для любых двух ненулевых векторов из Θ справедливо неравенство:

$\|\mathbf{Pr}(\mathbf{a},[\mathbf{b}])\| \le \|\mathbf{a}\|.$

Это позволяет определить стандартную меру сходства образа с моделью – *нормированный морфологический коэффициент корреляции*:

$K_{стр}(A,B)= \|\mathbf{Pr}(\mathbf{a},[\mathbf{b}])\| / \|\mathbf{a}\|,$ (24)

где $A,B\in\Omega$; $\mathbf{a}=\mathbf{dec}(A),\mathbf{b}=\mathbf{dec}(B)\in\Theta$, со следующими *стандартными свойствами*:

1) $0 \le K_{стр}(A,B) \le 1$;
2) $K_{стр}(A,A) = 1$.
3) $K_{стр}(A,B) = 0 \Leftrightarrow Pr(A,[B]) = \varnothing$.

Коэффициент корреляции (48) позволяет сравнивать однородные структуры с точностью до *класса морфологически эквивалентных структур*:

$\boldsymbol{B}=\{X\in\Omega\colon K_{стр}(X,B)=1\}.$ (25)

Однако это отношение эквивалентности асимметрично, что дает возможность различать среди эквивалентных образов «более простые» и «более сложные» структуры. Если

$K_{стр}(A,B) = 1,\ K_{стр}(B,A) < 1,$ (26)

значит «A сложнее B», и соответственно «B проще A».

Таким образом, задача структурного сравнения изображений успешно решается в пространстве морфологических признаков вне зависимости от семантической природы прикладной области.

Заметим, что для решеток в силу условий (15)-(17) морфологический коэффициент корреляции со стандартными свойствами типа (24) может быть определен непосредственно в пространстве изображений:

$K_{стр}(A,B)= \|Pr(A,[B])\| / \|A\|,$ (27)

где $A,B\subseteq\Omega$.

Отдельного рассмотрения заслуживает вопрос о том, в каких случаях мы можем рассматривать вектора разложений как обычные вектора n-мерного евклидова пространства, и соответственно пользоваться другими, более привычными определениями меры и проекции векторов, основанными на скалярном произведении и норме. Из рассмотрения условий (8), (9), (11) следует, что для этого необходимо, чтобы оператор $\mathbf{V}$ имел смысл *сложения*, базис был *ортогональным*, а исходное пространство образов Ω имело структуру линейного гильбертова пространства L^2, где также было бы определено скалярное произведение элементов. Это часто встречающийся на практике случай, однако для многих типов моделей и структурных образов эти условия не выполняются.

Таким образом, далеко не всегда традиционные процедуры классификации (или кластеризации) векторов признаков на основе метрических расстояний между ними или соответствующих вероятностных мер оказываются адекватными природе анализируемых структурных образов. В то же время модификации этих процедур, основанные на использовании структурных мер близости, являются существенно более обоснованными с точки зрения семантики анализируемых объектов.

2. Локализация образов на изображениях

2.1. Проективная морфология изображений

Пусть на проективном пространстве образов $\{\Psi,\Omega,\bullet,\mathbf{V},\mu,\Pr\}$ задана *группа преобразований* $\mathcal{G}(\Omega)$. Алгебраическую систему $\{\Psi,\Omega,\bullet,\mathbf{V},\mu(\Omega),\Pr,\mathcal{G}(\Omega)\}$ можно назвать *проективно-геометрическим пространством*, если выполняются следующие условия комбинации образов из Ω с преобразованиями из $\mathcal{G}$:

$$\tau(a\bullet B)=a\bullet\tau(B);$$
$$\tau(A\vee B)=\tau(A)\vee\tau(B); \qquad (28)$$
$$\Pr(\tau(A),\tau(B))= \tau(\Pr(A,B)),$$

где $a\in\Psi$; $\tau\in\mathcal{G}(\Omega)$; $A,B\in\Omega$.

При этом $\mathcal{G}(\Omega)$ имеет смысл множества *геометрических преобразований* образов, тогда как умножение образов на скаляры имеет здесь смысл *яркостных преобразований*.

Предположим теперь, что группа преобразований $\mathcal{G}(\Omega)$, является *параметрической*:

$$\mathcal{G}(P)=\{g(\mathbf{p})\in\mathcal{G};\ \mathbf{p}\in P\subseteq R^N\}, \qquad (29)$$

где N – размерность *пространства параметров исходных образов* P; $g(\mathbf{0})=\varepsilon$ - тождественное преобразование.

Таким образом, множество образов Ω также оказывается *параметризованным*:

$$\Omega(P)=\{A(\mathbf{p})=g(\mathbf{p})(A):\ A\in\Omega,\ g(\mathbf{p})\in\mathcal{G};\ \mathbf{p}\in P\subseteq R^N\}. \qquad (30)$$

Пусть теперь имеется некоторый n-мерный базис морфологического разложения $\mathbf{E}(P)=\{\varphi_k(\mathbf{p})\in\Omega\}$, на котором также задана группа преобразований

$$\mathcal{R}(Q)=\{\sigma(\mathbf{q})\in\mathcal{R};\ \mathbf{q}\in Q\subseteq R^M\}, \qquad (31)$$

где M – размерность пространства параметров преобразования Q, $r(\mathbf{0})=\varepsilon$.

В этом случае (M+1)-мерный вектор $(k\in[1..n],\mathbf{q}\in Q)$ можно назвать *полным вектором параметров морфо-геометрического базиса*

$$\mathbf{E}(P,Q)=\{\varphi(k,\mathbf{p},\mathbf{q})=\sigma(\mathbf{q})(\varphi_k(\mathbf{p}))\in\Omega,\ \mathbf{p}\in P,\ \mathbf{q}\in Q,\ k\in[1..n]\}.$$

С учетом введенных определений выражение (10), описывающее разложение образа по базису, примет следующий вид:

$$\Pr(A(\mathbf{p}),\mathbf{E(p,q)})=\mathbf{V}_{k=1..n;\ q\in Q}(\Pr(A(\mathbf{p}),\varphi(k,\mathbf{p},\mathbf{q})))=\mathbf{V}_{k=1..n;\ q\in Q}(A(k,\mathbf{q})\bullet\varphi(k,\mathbf{p},\mathbf{q})), \qquad (32)$$

где $A(\mathbf{p})$ – *представление образа* A *в исходном пространстве* P; n – *количество типов примитивов* структурного базиса $\mathbf{E(0)}$; $A(k,\mathbf{q})$ – *представление образа* A *в пространстве параметров разложения* $[1..n]\times Q$, где k – *индикатор типа образующей*.

В дальнейшем для простоты обозначений будем считать, что вектор $\mathbf{q}$ является полным вектором параметров и включает в себя также индикатор типа образующей:

$\Pr(A(\mathbf{p}),\mathbf{E(p,q)})=\bigvee_{q\in Q}(A(\mathbf{q})\bullet\varphi(\mathbf{p,q}))$. (33)

Таким образом, в области яркостно-геометрического анализа изображений в качестве характеристических структурных статистик выступают уже не вектора признаков, а представления характеризуемых образов в пространстве параметров. В дискретном случае они имеют вид M-мерных массивов-*аккумуляторов*.

По аналогии с введенным ранее *морфологическим разложением* (10) введем *морфо-геометрическое разложение* как оператор, отображающий образ из $\Omega(P)$ в *параметризованное пространство разложений* $\Theta(Q)$:

$\mathbf{dec(}A(\mathbf{p})\mathbf{)}=A(\mathbf{q})$: $A\in\Omega(P)\to\Theta(Q)$. (34)

Параметризованное пространство разложений $\Theta(Q)$ представляет собой пространство M-мерных массивов, на котором определены поэлементные операции *объединения массивов, умножения массива на скаляр* и задана *норма (модуль) массива:*

$A(\mathbf{q})\vee B(\mathbf{q}) = a[\mathbf{q}]\vee b[\mathbf{q}]$, $\forall\ \mathbf{q}\in Q$

$a\bullet B(\mathbf{q})=a\bullet b[\mathbf{q}]$, $\forall\ \mathbf{q}\in Q$, (35)

$\mu(A(\mathbf{q}))\geq 0$; $\mu(0(\mathbf{q}))=0$; $\mu(A(\mathbf{q})\vee B(\mathbf{q}))\leq \mu(A(\mathbf{q}))+\mu(B(\mathbf{q}))$, $\mu(a\bullet B(\mathbf{q}))=|a|\bullet\mu(B(\mathbf{q}))$,

где $a\in\Psi$; $A(\mathbf{q}),B(\mathbf{q})\in\Theta(Q)$, $a[\mathbf{q}]$ – элемент массива $A(\mathbf{q})$.

Определим теперь в пространстве параметров $\Theta(Q)$ операцию *проекции разложения на разложение*, такую что

$\Pr(A(\mathbf{q}),B(\mathbf{q}))=r(A(\mathbf{p}),B(\mathbf{p}))\bullet B(\mathbf{q})$, (36)

где $A(\mathbf{p}),B(\mathbf{p})\in\mathbf{E}(P)$; $A(\mathbf{q})=\mathbf{dec(}A(\mathbf{p})\mathbf{)}$, $B(\mathbf{q})=\mathbf{dec(}B(\mathbf{p})\mathbf{)}\in\Theta(Q)$; $r(A(\mathbf{p}),B(\mathbf{p}))$ - линейная структурная корреляция образов $A(\mathbf{p})$ и $B(\mathbf{p})$. Соответственно *нормированный коэффициент линейной корреляции разложений* будет иметь вид:

$K(A(\mathbf{q}),B(\mathbf{q})) = \|\Pr(A(\mathbf{q}),B(\mathbf{q}))\|/(\|A(\mathbf{q})\|\bullet\|B(\mathbf{q})\|)$. (37)

Ведем понятие *геометрического носителя* образа:

$S_P(A)=\{\mathbf{p}: A(\mathbf{p})\neq 0\}$;

$S_Q(A)=\{\mathbf{q}: A(\mathbf{q})\neq 0\}$, (38)

где $S_P(A)$ – носитель образа A в исходном пространстве параметров; $S_Q(A)$ – носитель образа A в пространстве разложений. С учетом этого, элементам яркостно-геометрической модели изображения можно дать следующую семантическую интерпретацию:

- значения $A(\mathbf{q})$ - коэффициенты разложения (веса образующих $E_k(\mathbf{q})$) описывают яркостную природу образа A;
- множество образующих $\{\varphi(\mathbf{p,q})\}$ и носитель образа $S_Q(A)$ описывают его геометрическую природу.

Построенную таким образом проективную морфологию естественно называть *яркостно-геометрической морфологией* или *проективной морфологией изображений*.

2.2. Инвариантные меры сходства

Рассмотрим *отношение эквивалентности* вида

$\forall A(\mathbf{p}),B(\mathbf{p})\in\Omega$: $A(\mathbf{p})\sim B(\mathbf{p}) \Leftrightarrow \exists\mathbf{q'}\in Q$: $A(\mathbf{p})=\sigma(\mathbf{q'})(B(\mathbf{p}))$, $\sigma(\mathbf{q'})\in\mathcal{R}$.

Оно определяет соответствующий *класс эквивалентности*

$\boldsymbol{B}(\mathbf{p})=\{B(\mathbf{p,q})=\sigma(\mathbf{q})(B(\mathbf{p}))$, $\mathbf{q}\in Q$, $\sigma(\mathbf{q})\in\mathcal{R}\}$. (39)

Определим *линейную проекцию образа на класс геометрически эквивалентных образов*:

$\Pr(A(\mathbf{p}),\boldsymbol{B}(\mathbf{p}))=r(A(\mathbf{p}),B(\mathbf{p,q'}))\bullet B(\mathbf{p,q'})$:

$\forall\mathbf{q}\in Q$, $r(A(\mathbf{p}),B(\mathbf{p,q}))\leq r(A(\mathbf{p}),B(\mathbf{p,q'}))$, (40)

где $r(A(\mathbf{p}),B(\mathbf{p}))$ задает систему отношений *сходства* или *близости* образов в исходном пространстве изображений. Инвариантный нормированный коэффициент линейной корреляции изображений будет иметь вид:

$K(A(\mathbf{p}),\boldsymbol{B}(\mathbf{p})) = |\Pr(A(\mathbf{p}),\boldsymbol{B}(\mathbf{p}))|/(|A|\bullet|B|)= |r(A(\mathbf{p}),\boldsymbol{B}(\mathbf{p,q'}))|/|A(\mathbf{p})$. (41)

Аналогичным образом *морфологическую проекцию образа на класс геометрически эквивалентных образов* можно определить как:

$\Pr(A(\mathbf{p}),[\boldsymbol{B}(\mathbf{p})])=\Pr(A(\mathbf{p}),[B(\mathbf{p},\mathbf{q}')])$:

$$\forall \mathbf{q}\in Q,\ |\Pr(A(\mathbf{p}),[B(\mathbf{p},\mathbf{q})])|\le|\Pr(A(\mathbf{p}),[B(\mathbf{p},\mathbf{q}')])| \qquad (42)$$

Геометрически инвариантный нормированный коэффициент морфологической корреляции изображений будет иметь вид:

$$K_{стр}(A(\mathbf{p}),\boldsymbol{B}(\mathbf{p})) = |\Pr(A(\mathbf{p}),[\boldsymbol{B}(\mathbf{p})])|/|A(\mathbf{p})|. \qquad (43)$$

Перейдем в пространство разложений $\Theta(Q)$. Поскольку

$$A(\mathbf{p})\sim B(\mathbf{p}) \Leftrightarrow \exists \mathbf{q}'\in Q: A(\mathbf{p})=\sigma(\mathbf{q}')(B(\mathbf{p})) \Rightarrow A(\mathbf{q})=B(\mathbf{q}+\mathbf{q}'),$$

соответствующий класс *геометрически эквивалентных разложений* можно описать как

$$\boldsymbol{B}(\mathbf{q})=\{B(\mathbf{q}+\mathbf{q}'),\ \mathbf{q}'\in Q\}. \qquad (44)$$

а проекция разложения на этот класс описывается выражением:

$\Pr(A(\mathbf{q}),\boldsymbol{B}(\mathbf{q}))=r(A(\mathbf{q}),B(\mathbf{q}+\mathbf{q}'))\bullet B(\mathbf{q}+\mathbf{q}')$:

$$\forall \mathbf{q}''\in Q,\ r(A(\mathbf{q}),B(\mathbf{q}+\mathbf{q}''))\le r(A(\mathbf{q}),B(\mathbf{q}+\mathbf{q}')). \qquad (45)$$

Следовательно нормированный *инвариантный коэффициент линейной корреляции разложений* будет иметь вид:

$$K(A(\mathbf{q}),\boldsymbol{B}(\mathbf{q})) = |\Pr(A(\mathbf{q}),\boldsymbol{B}(\mathbf{q}))|/(|A(\mathbf{q})|\bullet|B(\mathbf{q})|), \qquad (46)$$

а *нормированный инвариантный коэффициент морфологической корреляции разложений* может быть определен следующим образом:

$$K_{стр}(A(\mathbf{q}),\boldsymbol{B}(\mathbf{q}))=K_{стр}(A(\mathbf{q}),B(\mathbf{q}')):\ \forall \mathbf{q}\in Q,\ K_{стр}(A(\mathbf{q}),B(\mathbf{q}))\le K_{стр}(A(\mathbf{q}),B(\mathbf{q}')). \qquad (47)$$

В наиболее общем виде решение задачи построения инвариантного морфологического описания изображения можно описать следующим образом.

Пусть дано некоторое множество *классов яркостно-геометрической эквивалентности изображений* $\mathbf{[B]}=\{[B_k]\}$, каждый из которых замкнут относительно операций линейной комбинации изображений (объединения и умножения на скаляр), а также относительно геометрических преобразований из $\mathcal{R}$.

Если любые два класса из $\mathbf{[B]}$ являются *линейно независимыми*, то есть

$$\forall[B_k],[B_i]\in\mathbf{[B]},\ k\ne i:\ \forall\alpha\in\Psi, A\in[B_k], B\in[B_i]: A\ne\alpha B, \qquad (48)$$

тогда множество $\mathbf{[B]}$ можно назвать *базисом инвариантного структурного описания*, причем гарантируется инвариантность описания относительно яркостно-геометрических преобразований изображения, определяемых умножением изображения на скаляр и применением к изображению геометрических преобразований из $\mathcal{R}$.

Определим операцию *проекции изображения на подпространство* $\boldsymbol{[B]}$, образованное линейным замыканием множества классов $\mathbf{[B]}$, такую что:

$\Pr(A,\boldsymbol{[B]})\in\boldsymbol{[B]}$; $\Pr(A,\boldsymbol{[B]})=\Pr(\Pr(A,\boldsymbol{[B]}),\boldsymbol{[B]})$;

$$\Pr(\varnothing,\boldsymbol{[B]})=\varnothing;\ \Pr(a\bullet A,\boldsymbol{[B]})=a\bullet\Pr(A,\boldsymbol{[B]}), \qquad (49)$$

где $a\in\Psi$; $A,\varnothing\in\Omega$; $\boldsymbol{[B]}\subseteq\Omega$.

Пусть теперь для некоторого базиса инвариантного описания $\mathbf{[E]}$ размерности n, проекция любого образа из Ω на замыкание $\boldsymbol{[E]}$ удовлетворяет *условию разложимости:*

$$\Pr(A,\boldsymbol{[E]}) = \vee_{k=1..n}(\Pr(A,[E_k])). \qquad (50)$$

То есть, как и в случае условия (10), *проекция образа на базис есть объединение проекций на его элементы*. Построенную таким образом алгебраическую систему $\{\Psi,\Omega,\bullet,\vee,\mu,\Pr,\mathcal{R},\mathbf{[E]}\}$, для которой справедливо условие (50), можно назвать *инвариантной проективной морфологией* на Ω. Базис $\mathbf{[E]}$ является здесь соответственно *базисом инвариантного морфологического разложения.*

Таким образом, можно утверждать, что массивы разложений из $\Theta(Q)$ полностью и адекватно описывают яркостно-геометрические свойства образов из $\Omega(P)$, а процедуры сравнения изображений, основанные на моделях такого типа, обеспечивают инвариантность к *линейным яркостным преобразованиям* пространства Ψ, а также *геометрическим преобразованиям* $\mathcal{G}(P)$ пространства P.

2.3. Локализация образов на изображениях

Пусть имеется *морфо-геометрическая модель искомого фрагмента* вида:

$$M(\mathbf{p},\mathbf{u})=\vee_{q\in Q}(M(\mathbf{u},\mathbf{q})\bullet\varphi(\mathbf{p},\mathbf{q})) \,, \qquad (51)$$

где $\mathbf{u}\in Q$ – вектор параметров локализации объекта $M(\mathbf{p},\mathbf{u})$; $\mathbf{q}\in Q$ – вектор параметров локализации структурных примитивов данного разложения $\varphi(\mathbf{p},\mathbf{q})$; $M(\mathbf{u},\mathbf{q})=\{0,1\}$ –*модель локализации объекта*, которая описывает все допустимые соответствия между значениями параметров локализации образа в целом и параметрами локализации составляющих его геометрических примитивов.

Рассмотрим задачу обнаружения всех объектов, описываемых моделью (51), на наблюдаемом изображении

$$A(\mathbf{p})=\vee_{q\in Q}(A(\mathbf{q})\bullet\varphi(\mathbf{p},\mathbf{q})). \qquad (52)$$

Определим структурную проекцию изображения (52) на модель (51):

$$Pr(A(\mathbf{p}),M(\mathbf{p},\mathbf{u})) = \vee_{q\in Q}(M(\mathbf{u},\mathbf{q})\bullet A(\mathbf{q})\bullet\varphi(\mathbf{p},\mathbf{q})) \qquad (53)$$

и соответствующий коэффициент структурной корреляции

$$K(A(\mathbf{p}),M(\mathbf{p},\mathbf{u})) = |Pr(A(\mathbf{p}),M(\mathbf{p},\mathbf{u}))| \,/\, |A(\mathbf{q})|. \qquad (54)$$

Как видно, коэффициент корреляции оказывается функцией параметра $\mathbf{u}$, то есть представляет собой *корреляционное поле* $K(\mathbf{u})$, локальные максимумы которого соответствуют параметрам наиболее достоверной локализации объекта, описываемого моделью (48).

Поскольку геометрическая модель $M(\mathbf{u},\mathbf{q})$ симметрична по отношению к векторам параметров $\mathbf{u}$ и $\mathbf{q}$, возникают две равновозможные стратегии анализа изображения с целью обнаружения всех объектов, описываемых моделью (51).

Анализ изображения «сверху вниз» осуществляется путем принудительного вычисления значений корреляционного поля $K(\mathbf{u})$ для всех возможных значений параметров вектора $\mathbf{u}$. Данный способ сплошной проверки всех возможных вариантов локализации объекта можно также назвать процедурой *согласованной морфологической фильтрации*.

Анализ изображения «снизу вверх» осуществляется путем обнаружения значимых особенностей изображения и их голосования в пользу возможных значений параметров вектора $\mathbf{u}$, определяемых выражением $M(\mathbf{u},\mathbf{q})=1$.

Как было ранее отмечено в работе [11], в отличие от «переборных» корреляционных методов обнаружения, методы, основанные на голосовании элементов изображения в пользу гипотез о присутствии и положении на изображении искомого объекта, обладают следующими возможностями *увеличения вычислительной эффективности* процедур анализа изображения:

- Независимое (в смысле очередности подачи голосов) голосование образующих элементов в пользу параметров локализации объекта;
- Возможность декомпозиции или редукции модели объекта (группировка или уменьшение количества анализируемых образующих в модели);
- Возможность декомпозиции или редукции вектора параметров (группировка или уменьшение количества анализируемых параметров модели).

Все эти возможности можно строго обосновать, опираясь на выражения (51)-(54).

Заключение

В данной работе описана проективная морфология, представляющая собой алгебру структур с однородной связью, позволяющую формально описывать и сравнивать структурные модели и структурные объекты вне зависимости от конкретной прикладной области. Базовым понятием здесь является «составной образ», который строится из первичных «примитивов» или других образов при помощи их объединения некоторой кумулятивной (ассоциативной и коммутативной) операцией с некоторыми весами-скалярами, численно характеризующими «степень связи» образа с его элементом. «Моделью» образа считается его структурное описание со свободными (переменными) связями (весами). Важным элементом данного формализма является наличие оператора проекции образа на образ (а также образа на модель другого образа), который формально описывает семантически нагруженные понятия «сходства» или «близости» образов. Специфическим свойством проективной морфологии является то, что вес каждой образующей в модели образа определяется проекцией этого образа на данную образующую. Показано, что введенные таким образом однородные структуры всегда могут быть однозначно охарактеризованы массивами или векторами признаков, которые в семантическом плане можно рассматривать как содержательные структурные описания соответствующих объектов. При этом в пространстве морфологических признаков стандартным образом определяются удобные нормированные коэффициенты морфологической корреляции, позволяющие оценивать степень сходства образов с точностью до некоторых классов эквивалентности, которые, в свою очередь, соответствуют определенным семантическим таксонам предметной области («фигуры одной формы», «модели одного класса» и т.п.).

На основе проективной морфологии изображений предложен обобщенный формализм морфологического сравнения изображений, определены меры структурного сходства между ними, описано решение задач взаимной структурной привязки изображений (matching). Это позволяет рассматривать в рамках единого подхода к сравнению изображений не только корреляцию функций яркости и процедуры морфологического анализа Ю.П. Пытьева, но также структурные модели изображения, опирающиеся на операторы математической морфологии Серра, методы голосования, восходящие к преобразованию Хафа, частотные методы фильтрации (на базе преобразования Фурье, БПФ, ДКП и др.), пространственно-частотные методы фильтрации (кратномасштабный вейвлет-анализ).

Основным ограничением предложенного подхода является то, что описанный класс «моделей с однородными структурными связями» позволяет задавать лишь состав входящих в модель (образ) элементов и связь между этими образующими и образом в целом, но не рассматривает связи образующих элементов между собой. Это ограничение является принципиальным, так как модели более общего вида, описываемые произвольными гиперграфами, не могут быть однозначно охарактеризованы однородными массивами или векторами признаков.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Пытьев Ю.П.** Морфологический анализ изображений. Доклады АН СССР, 1983. Т. 269. № 5. С. 1061-1064.
2. **Пытьев Ю.П.** Задачи морфологического анализа изображений // Математические методы исследования природных ресурсов Земли из Космоса. М.: Наука, 1984. С.41-83.
3. **Serra J.** Image Analysis and Mathematical Morphology, Academic Press, London, 1982.
4. **Serra J.** Introduction to mathematical morphology. Computer Vision, Graphics and Image Processing, 1986. V. 35, № 3.
5. **Hough P.V.C.** Methods and Means for Recognizing Complex Patterns. US, Patent 3069654, 1962.
6. **Ballard D.H.** Generalizing the Hough transform to detect arbitrary shapes. Pattern Recognition, 1981. № 13(2). P. 111-122.
7. **Ballard D.H., Brown C.M.** Computer Vision. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1982.
8. **Davies E.R.** Machine Vision: Theory, Algorithms, Practicalities. San Diego: Academic Pres, 1997. P.750.

9. **Davies E.R.** Locating objects from their point features using an optimised Hough-like accumulation technique. Pattern Recogn. 1992. № 13(2). P.113-121.

10. **Гонсалес Р., Вудс Р.**, Цифровая обработка изображений. – М.: Техносфера, 2005, с.1072.

11. **Визильтер Ю.В.** Применение метода анализа морфологических свидетельств в задачах машинного зрения. Вестник компьютерных и информационных технологий, N9, 2007.

Статья поступила в редакцию 20.10.2007 г.